数理解析研究所講究録
第 1561 巻 2007 年 106-112

Shapley 値の公理

本田あおい 岡崎悦明
(九州工業大学・情報工学部)

1 はじめに

n 人のプレーヤーからなる集合を X としたとき, X の任意の部分集合を提携とよぶ. 任意の提携について確保できる利益を表す関数 $v: 2^X \to I\!R$ を協力ゲーム, あるいは単にゲームという. ゲームの全体集合から n 次元実数ベクトルへの関数をゲームの解といい, 各プレーヤーの貢献度の評価, あるいは分配されるべき利益を表している. 代表的な解はシャプレイ値 [4] とバンザフ値 [2] であり, これらは自然な公理系により特徴づけされている.

Faigle と Kern は極大鎖の概念を用いて, シャプレイ値をより一般的な形に拡張した [3]. また Algeba らは内包 (interior) を用いた拡張を行い, 公理系による特徴づけを行った [1]. これらの拡張により, 双容量や多選択肢選択ゲーム等のゲームの解を得ることが可能である. 本論文では Faigle らと Algeba らのそれぞれのシャプレイ値の拡張を紹介する. また, Faigle らの拡張は 6 つの自然な公理からなる公理系により特徴づけできる妥当性を持ったものであることを示す.

2 準備

本論文を通して $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし X の部分集合全体を 2^X であらわす. 本章では, 公理を記述するのに必要な概念の定義を与える.

定義 1 (集合系). $\mathfrak{S} \subseteq 2^X$ が $\emptyset$ と X を要素に持つとき $(X, \mathfrak{S})$ を集合系とよぶ. X が明らかな場合は単に $\mathfrak{S}$ と書く.

$A, B \in \mathfrak{S}$ について $A \subsetneq B$ かつ $A \subseteq C \subsetneq B, C \in \mathfrak{S}$ が同時に成り立つならば $C = A$ であるとき A は B に被覆されている, あるいは B は A を被覆しているといい, $A \prec B$ または $B \succ A$ と書く. $A \subsetneq B$ の包含関係の間に入る要素が存在しないという意味である.

定義 2 (極大鎖). $(X, \mathfrak{S})$ を集合系とする. $\mathscr{C} = (C_0, C_1, \ldots, C_m), C_i \in \mathfrak{S}, i = 0, \ldots, m$ が $\emptyset = C_0 \prec C_1 \prec \cdots \prec C_m = X$ を満たすとき $\mathscr{C}$ を $\mathfrak{S}$ の極大鎖とよぶ.

極大鎖 $(C_0, C_1, \ldots, C_m)$ の長さは m である. $\mathfrak{S}$ の長さ $m, 1 \leq m \leq n$ の極大鎖全体を $\mathscr{M}_m(\mathfrak{S})$ と書くことにする.

例 3. $X = \{1, 2, 3\}$ とする. $\mathfrak{S} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, X\}$ とすると $\mathfrak{S}$ の極大鎖は

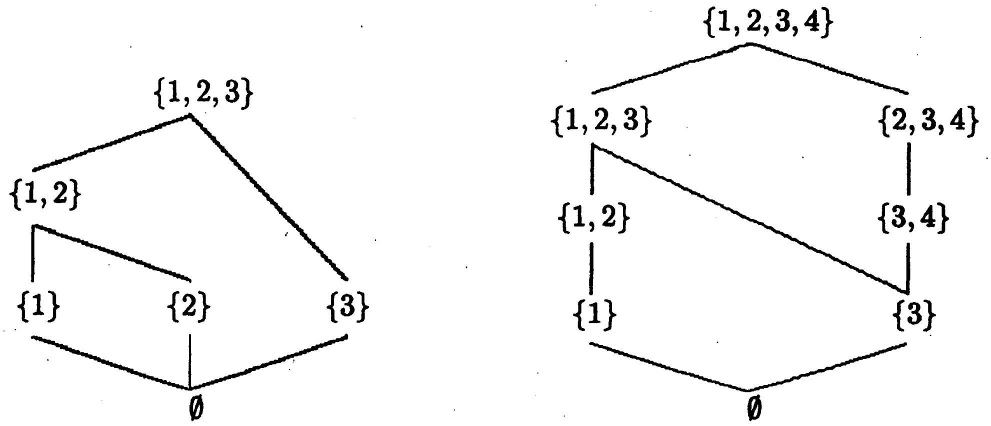
$$\mathscr{C}_1 := (\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X),\ \mathscr{C}_2 := (\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, X),\ \mathscr{C}_3 := (\emptyset, \{3\}, X)$$

の3つであり $\mathscr{M}_2(\mathfrak{S})=\{\mathscr{C}_3\}, \mathscr{M}_3(\mathfrak{S})=\{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2\}$ である (図1). また, 一般に 2^X には $n!$ 個の極大鎖が存在し全て長さ n, すなわち $|\mathscr{M}_n(2^X)|=n!$ である. 例えば $X=\{1,2,3\}$ のとき 2^X の極大鎖は

$$(\emptyset,\{1\},\{1,2\},X),\ (\emptyset,\{1\},\{1,3\},X),\ (\emptyset,\{2\},\{1,2\},X),$$
$$(\emptyset,\{2\},\{2,3\},X),\ (\emptyset,\{3\},\{1,3\},X),\ (\emptyset,\{3\},\{2,3\},X)$$

の6つであり, 全て長さ3である.

定義 4 (全順序集合系). $(X,\mathfrak{S})$ を集合系とする. 任意の $E,F\in\mathfrak{S}$ に対して, $E\subseteq F$ か $E\supsetneq F$ が成り立つとき, $(X,\mathfrak{S})$ を全順序集合系とよぶ.



例3　　例7

図1: 集合系のハッセ図

定義 5 (正規集合系). $(X,\mathfrak{S})$ を集合系とする. 任意の $E\in\mathfrak{S}$ に対して, ある $\mathscr{C}\in\mathscr{M}_n(\mathfrak{S})$ が存在して $E\in\mathscr{C}$ が成り立つとき, $(X,\mathfrak{S})$ を正規集合系とよぶ.

例 6. 例3の集合系 $(X,\mathfrak{S})$ は正規集合系でない. なぜなら $\{3\}$ を含む長さ3の極大鎖が存在しない.

例 7. 正規集合系は全ての極大鎖の長さが n である必要はない. 例えば $(\{1,2,3,4\},\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\})$ は長さ4の極大鎖の他に長さ3の極大鎖 $(\emptyset,\{3\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\})$ も存在するが正規集合系である (図1).

定義 8 (ゲーム). $(X,\mathfrak{S})$ を集合系とする. 関数 $v:\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$ が $v(\emptyset)=0$ を満たすとき, v をゲームとよぶ.

3　シャプレイ値の公理

$(X,\mathfrak{S})$ 上のゲーム v があたえられたとき, n 次元実数 $\Phi(v)=\{\phi^1(v),\ldots,\phi^n(v)\}$ をゲームの解という. ゲームの解はゲームにおけるプレイヤーの役割をどう考えるかによって様々に定義さ

れるが, その値は各プレイヤーがそのゲームにおいてもつ役割や強弱を反映し, 全てのプレイヤーにとって妥当と考えられるような値であることが望ましい. Shapley は $(X, 2^X)$ 上に定義されたゲームの解の定義を与えた. この値はシャプレイ値と呼ばれる.

定義 9 (シャプレイ値). v を $(X, 2^X)$ 上のゲームとする. v のシャプレイ値 $\Phi_S(v) = (\phi_S^1(v), \ldots, \phi_S^n(v)) \in I\!R^n$ は次のように定義される.

$$\text{(S)} \qquad \phi_S^i(v) := \sum_{E \subseteq X \setminus \{i\}} \gamma_{|E|}^n (v(E \cup \{i\}) - v(E)), \ i = 1, \ldots, n,$$

ただし

$$\gamma_k^n := \frac{(n-k-1)!k!}{n!}.$$

シャプレイ値について, 次の公理系による特徴づけが知られている.

公理 1 (全体合理性). 任意のゲーム v に対して

$$\sum_{i=1}^n \phi^i(v) = v(X).$$

公理 2 (ナルプレイヤーのゼロ評価). 任意の $E \subset X \setminus \{i\}$ に対して $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ が成り立つとき, $\phi^i(v) = 0$.

公理 3 (対称性). 任意の $E \subseteq X \setminus (\{i\} \cup \{j\})$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ が成り立つとき, $\phi^i(v) = \phi^j(v)$.

公理 4 (加法性). 任意のゲーム v_1, v_2 に対して, 任意の i について $\phi^i(v_1 + v_2) = \phi^i(v_1) + \phi^i(v_2)$.

これら 4 つの公理はゲームの解として妥当, かつ自然な性質である. シャプレイ値はこれらの公理により特徴づけされる.

定理 10. v を $(X, 2^X)$ 上のゲームとする. このとき公理 1,2,3,4 を満たすゲームの解 $\Phi(v) = \{\phi^1(v), \ldots, \phi^n(v)\}$ が一意に存在して (S) で与えられる.

シャプレイ値について, 極大鎖を用いた次の別表現が知られている.

定理 11. v を $(X, 2^X)$ 上のゲームとし, 任意の $i \in X$ を固定する. 任意の v のシャプレイ値について, 任意の $\mathscr{C} \in \mathscr{M}_n(2^X)$ に対して, $E_{\mathscr{C}} \in \mathscr{C}$ がただ一つ存在し,

$$\phi_S^i(v) = \frac{1}{|\mathscr{M}_n(2^X)|} \sum_{\mathscr{C} \in \mathscr{M}_n(2^X)} (v(E_{\mathscr{C}} \cup \{i\}) - v(E_{\mathscr{C}}))$$

が成り立つ. ただし, $E_{\mathscr{C}}$ は $i \notin E$ かつ $E \cup \{i\} \in \mathscr{C}$ を満たす $\mathscr{C} \in \mathscr{M}_n(\mathfrak{S})$ の要素.

4 シャプレイ値の拡張と公理

Faigle と Kern はシャプレイ値を多選択肢選択ゲームに適用可能に拡張した [3]. 多選択肢選択ゲームとは全順序集合系 $L_1,\ldots,L_k$, つまり $L_i := \{\ell_{i,1},\ldots,\ell_{i,n(i)}\}$, $j \neq k$ に対して $\ell_{i,j} \leq \ell_{i,k}$, の直積集合 $L_1 \times \cdots \times L_k$ 上に定義された $v(\ell_{1,1},\ell_{2,1},\ldots,\ell_{k,1}) = 0$ を満たす関数 v のことである. ここでは Faigle と Kern の拡張をより一般化し, 正規集合系上に定義されたゲームに適用できるようにする (定理 10 参照).

定義 12 (Faigle と Kern による拡張, FK-シャプレイ値). v を正規集合系 $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲームとする. このとき v のゲームの解 $\Phi(v) = (\phi^1(v),\ldots,\phi^n(v)) \in I\!R^n$ を次のように定義する.

$$\textbf{(FK)} \qquad \phi^i_{\mathrm{FK}}(v) := \frac{1}{|\mathscr{M}_n(\mathfrak{S})|}\sum_{\mathscr{C}\in\mathscr{M}_n(\mathfrak{S})} (v(E_{\mathscr{C}}\cup\{i\}) - v(E_{\mathscr{C}})), i = 1,\ldots,n,$$

ただし $E_{\mathscr{C}}$ は $i \notin E$ かつ $E\cup\{i\}\in\mathscr{C}$ を満たす $\mathscr{C}\in\mathscr{M}_n(\mathfrak{S})$ の要素.

v を $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲームとするとき, $(X,\mathfrak{S},v)$ をゲーム空間とよぶことにする. Σ_n を $X := \{1,2,\ldots,n\}$ の正規集合系全体とし, $\Delta_{\mathfrak{S}}$ を $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲーム全体とする. Φ の定義域は $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\mathfrak{S}\in\Sigma_n}\Delta_{\mathfrak{S}}$ であり Φ は Δ から $I\!R^n$ への関数である. 以上のことから $\Phi(X,\mathfrak{S},v)$ と記述するべきであるが, 混乱のない限り単に $\Phi(v)$ と書くことにする.

さらに, 公理を記述するためのいくつかの概念を導入する.

定義 13 (双対ゲーム). v を 集合系 $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲームとする. v の双対ゲームは $\mathfrak{S}^d := \{E^c \in 2^X \mid E\in\mathfrak{S}\}$ 上に定義される次の関数である. 任意の $E\in\mathfrak{S}^d$ に対して $v^d(E) := 1 - v(E^c)$, ただし $E^c := X\setminus E$.

定義 14 (置換ゲーム). v を 集合系 $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲームとし, π を X 上の置換とする. v の π による置換は $\pi(\mathfrak{S}) := \{\pi(E)\in 2^X \mid E\in\mathfrak{S}\}$ 上に次のように定義される. $\pi\circ v(E) := v(\pi^{-1}(E))$.

長さ 2 の 全順序集合系 (例えば $\{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}$) を **2**, **2** 上のゲームを v^2 と書くことにする. さらに v^2 を値を極大鎖に沿って並べて $(0,s,t)$ とも書くことにする. 特に注意のない限り $\mathbf{2} := \{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}$ と仮定する,

定義 15 (v^2 の埋め込み). v を全順序集合系 $(X,\mathfrak{S}), \mathfrak{S} := \{C_0,\ldots,C_n\}$, $C_{i-1}\prec C_i$, $i=1,\ldots,n$, 上のゲームとする. である. さらに $v^2 := (0,s,t), t\neq 0$ を **2** 上のゲームとする. このとき $C_k\in\mathfrak{S}$ に対して, v^{C_k} を C_k での v^2 の v へ埋め込みとよび, 全順序集合系 $(X^{C_k},\mathfrak{S}^{C_k})$ 上に次のように定義する

$$v^{C_k}(E) := \begin{cases} v(C_j), & E = C_j, j<k \text{ のとき} \\ v(C_{k-1}) + \frac{u}{t}\cdot(v(C_k) - v(C_{k-1})), & E = C'_k \text{のとき} \\ v(C_{j-1}), & E = C'_j, j>k \text{ のとき}, \end{cases} \tag{1}$$

ただし $\{i_k\} = C_k\setminus C_{k-1}, i'_k \neq i''_k, (X\setminus\{i_k\})\cap\{i'_k,i''_k\} = \emptyset, X^{C_k} := (X\setminus\{i_k\})\cup\{i'_k,i''_k\}$, $C'_k := (C_k\setminus\{i_k\})\cup\{i'_k\}$, $j>k$ に対して $C'_j := (C_{j-1}\setminus\{i_k\})\cup\{i'_k,i''_k\}, \mathfrak{S}^{C_k} := \{C_0,\ldots, C_{k-1},C'_k,C'_{k+1},\ldots,C'_{n+1}\}$.

より正確には, v の双対ゲーム v^d は $(X,\mathfrak{S},v)$ の双対ゲーム空間 $(X,\mathfrak{S},v)^d := (X,\mathfrak{S}^d,v^d)$ であり, また v の置換ゲーム $\pi\circ v$ は $(X,\mathfrak{S},v)$ の置換ゲーム空間 $(X,\mathfrak{S},v)^\pi := (X,\pi(\mathfrak{S}),\pi\circ v)$ さ

らに, $(0,s,t), t \neq 0$ の v への埋め込みはゲーム空間 $(\{1,2\},\mathbf{2},(0,s,t))$ のゲーム空間 $(X,\mathfrak{S},v)$ への埋め込み $(X,\mathfrak{S},v)^{C_k} := (X^{C_k},\mathfrak{S}^{C_k},v^{C_k})$ である.

公理 5 (連続性). $\mathbf{2}$ 上の任意のゲーム $(0,u,t)$ に対して, $\phi^1(0,u,t)$ は $I\!R$ 上の u についての連続関数である.

公理 6 (v^2 に関する全体合理性). $\mathbf{2}$ 上の任意のゲーム $(0,u,t)$ に対して, $\phi^1(0,s,t)+\phi^2(0,s,t) = v(X) = t$ が成り立つ.

公理 7 (v^2 に関する双対不変性). $\mathbf{2}$ 上の任意のゲーム $(0,s,t)$ に対して, $\Phi(0,s,t) = \Phi(0,s,t)^d$ が成り立つ.

公理 8 (埋め込みについての妥当性). $(X,\mathfrak{S})$ を全順序集合系とし, $\mathfrak{S} := \{C_0,\ldots,C_n\}, C_{i-1} \prec C_i, i=1,\ldots,n$ とする. $(X,\mathfrak{S})$ 上の任意のゲーム v と, $\mathbf{2}$ 上の任意のゲーム $(0,s,t), t \neq 0$, と $\mathfrak{S}$ の任意の要素 C_k に対して次が成り立つ. v^{C_k} を v への埋め込みとしたとき, $\phi^{i'_k}(v^{C_k}) = \phi^{i_k}(v)\cdot\phi^1(0,s,t)/t$, $\phi^{i''_k}(v^{C_k}) = \phi^{i_k}(v)\cdot\phi^2(0,s,t)/t$ かつ $i \neq i'_k, i''_k$ に対して $\phi^i(v^{C_k}) = \phi^i(v)$, ただし $\{i_k\} := C_k \setminus C_{k-1}$.

公理 9 (凸性). $(X,\mathfrak{S}), (X,\mathfrak{S}_1), (X,\mathfrak{S}_2)$ が $\mathscr{M}(\mathfrak{S}_1) \cup \mathscr{M}(\mathfrak{S}_2) = \mathscr{M}(\mathfrak{S})$, $\mathscr{M}(\mathfrak{S}_1) \cap \mathscr{M}(\mathfrak{S}_2) = \emptyset$ を満たす正規集合体とし v を $\mathfrak{S}$ 上のゲームとする. このとき $\alpha \in]0,1[$ が存在して, $j=1,\ldots,n$ に 対して $\phi^i(v) = \alpha\phi^i(v|_{\mathfrak{S}_1}) + (1-\alpha)\phi^i(v|_{\mathfrak{S}_2})$ が成り立つ.

公理 10 (置換不変性). v を正規集合系 $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲームとする. このとき $\pi(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$ を満たす任意の X の置換 π に対して $\phi^i(v) = \phi^{\pi(i)}(\pi \circ v), i=1,\ldots,n$ が成り立つ.

定理 16. $X = \{1,2,\ldots,n\}, n \geq 2$ とし, v を正規集合系上 $(X,\mathfrak{S})$ のゲームとする. このとき公理 5, 6, 7, 8, 9 かつ 10 を満たすゲームの解 $\Phi(v) = \{\phi^1,\ldots,\phi^n\}$ が一意に存在して (FK) で与えられる.

5 Algeba らの拡張と公理

Algeba らはシャプレイ値をアンチマトロイド集合系上のゲームに拡張し, その公理化を行っている.

定義 17 (アンチマトロイド集合系). $(X,\mathfrak{S})$ を集合系とする. $\mathfrak{S}$ が
1. 任意の $E \in \mathfrak{S} \setminus \emptyset$ に対して, $E \setminus \{i\} \in \mathfrak{S}$ を満たす $i \in E$ が存在する
2. $E, F \in \mathfrak{S}$ ならば $E \cup F \in \mathfrak{S}$

を満たすときアンチマトロイド集合系とよぶ.

$(X,\mathfrak{S})$ がアンチマトロイド集合系ならば正規集合系である.

例 18. $(\{1,2,3\},\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ はアンチマトロイド集合系である.

例 19. $(\{1,2,3\},\{\emptyset,\ \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\})$ はアンチマトロイド集合系ではない. なぜなら, $\{1\}\cup\{3\}$ が存在しないからである.

定義 20 (Algeba らによる拡張. A-シャプレイ値). v をアンチマトロイド集合系 $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲームとする. このとき v のゲームの解 $\Phi(v)=(\phi^1(v),\ldots,\phi^n(v))\in I\!R^n$ を次のように定義する.

$$\text{(A)}\qquad \phi^i_{\mathrm{A}}(v):=\phi^i_{\mathrm{S}}(v_{\mathfrak{S}})=\sum_{E\subseteq X\setminus\{i\}}\gamma^n_{|E|}(v_{\mathfrak{S}}(E\cup\{i\})-v_{\mathfrak{S}}(E)),i=1,\ldots,n,$$

ただし $v_{\mathfrak{S}}(E):=v(\mathrm{int}_{\mathfrak{S}}(E))$ かつ任意の $E\in\mathfrak{S}$ に対して $\mathrm{int}_{\mathfrak{S}}(E):=\bigcup_{F\subseteq E,F\in\mathfrak{S}}F\in\mathfrak{S}$.

双容量や多選択肢選択ゲームといった, 応用で現れる一般的なゲームは全てアンチマトロイド集合系上に定義されたゲームとみなすことができるので, Algeba らの拡張したシャプレイ値は, FK-シャプレイ値と同様にこれらのゲームに適用できる. Algeba らは公理 1,4 と次の公理 11,12,13,14 を用いてこの拡張の特徴づけを行った.

公理 11 (非本質的プレイヤーのゼロ評価). $i\in X$ とする. i と 全ての $j\in P^i(\mathfrak{S})$ が ナルプレイヤーならば $\phi^i(v)=0$. ただし, $P^i(\mathfrak{S}):=\bigcup_{E\in A_i(\mathfrak{S})}E$, $A_i(\mathfrak{S}):=\{E\in\mathfrak{S}\mid E\setminus\{i\}\in\mathfrak{S}\}$.

公理 12 (不可欠なプレイヤーの強評価). $i\in X$ とする. 全ての $E\subseteq X\setminus\{i\}$ に対して $v(E)=0$ が成り立つとき, 全ての $j\in X\setminus\{i\}$ に対して $\phi^i(v)\leq\phi^j(v)$ が成り立つ.

公理 13 (単調構造). $i\in X$ とする. 任意の $i\in P_j(\mathfrak{S})$ に対して $\phi^i(v)\leq\phi^j(v)$ が成り立つ. ただし, $P_j(\mathfrak{S}):=\bigcap_{E\in A_j(\mathfrak{S})}E$.

公理 14 (公平性). $E\in\mathfrak{S}$ に対して $\mathfrak{S}\setminus E=:\mathfrak{S}'$ がアンチマトロイド集合系のとき, すべての $i,j\in X$ に対して

$$\phi^i(v)-\phi^i(v|_{\mathfrak{S}'})=\phi^j(v)-\phi^j(v|_{\mathfrak{S}'})$$

が成り立つ.

定理 21 ([1]). $X=\{1,2,\ldots,n\},n\geq 2$ とし, v をアンチマトロイド集合系上 $(X,\mathfrak{S})$ のゲームとする. このとき公理 $1,4,11,12,13$ かつ 14 を満たすゲームの解 $\Phi(v)=\{\phi^1,\ldots,\phi^n\}$ が一意に存在して (A) で与えられる.

6 検討

シャプレイ値を特徴づける公理 1,2,3,4 は自然で妥当なものである. FK-シャプレイ値の公理系と A-シャプレイ値の公理系について考える.

FK-シャプレイ値を特徴付ける公理 5 の連続性, 公理 7 の双対不変性はわかりやすい自然なものである. 公理 6 は公理 1 を, 公理 10 は公理 4 を弱めたものとなっており これらも妥当な性質である. 公理 8 はあるプレイヤー $i\in X$ が二人のプレイヤーに分割されたとき, すなわちプレイヤー i は実は, i' と i'' の二人から成るグループであり, この二人による全順序集合 $(\emptyset,\{i'\},\{i',i''\})$ 上のゲーム v^2 がわかっているときのゲームの解についての性質である. i',i'' の評価は i の評価の

値を v^2 より計算した評価の比に分割したものとなり，この i', i'' 以外プレイヤーの評価の値は変わらない，というのは自然な性質である．残る公理 9 の妥当性に若干問題があると言えるだろう．この公理 9 が FK-シャプレイ値を大きく特徴づけている．

また，公理 7 に関して，FK-シャプレイ値はより一般に任意の正規集合系上の任意のゲームに対して双対不変である．双対不変性はシャプレイ値も満たす性質であるが，A-シャプレイ値はこの性質を持たない．公理 10 の置換不変性については 3 つ のシャプレイ値の全てが満たしている．

次に A-シャプレイ値の公理系であるが，公理 1, 4 を含むのは望ましいといえるだろう．公理 11 は公理 2 を弱めたものである．公理 12 は，プレイヤーのうち，そのプレイヤーがいなくなるとゲームの値が全て 0 になるようなプレイヤーは他のプレイヤーより評価が高いという性質である．公理 14 は集合系のある要素を除いたときの，評価の値の変化がどのプレイヤーに対しても等しいというものである．妥当な性質かどうかわからないが，わかりやすい性質である．さらに公理 13 の性質が A-シャプレイ値を大きく特徴づけている．公理 13 はゲームの値によらず，集合系から評価の大小が決まるというものであり，この妥当性には疑問がある．

また，公理 12, 13 についてはシャプレイ値はこれらを満たすが，FK-シャプレイ値はこれらを満たさない．しかしながら，公理 12 は $(X, 2^X)$ 上のゲームについては，すなわちシャプレイ値については妥当な性質であるが，$(X, \mathfrak{S})$, $\mathfrak{S} \subsetneq 2^X$ のときに妥当な性質とは考えにくい．例えば，$(\{1,2,3\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\})$ 上のゲームの値が，$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0.01, v(\{2\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.01, v(\{1,2,3\}) = 1$ のとき，プレイヤー 1 は不可欠なプレイヤーであるが，プレイヤー 1 の評価がプレイヤー 3 より高いのは，不適当ではないだろうか．公理 13 は v の定義される集合が $(X, 2^X)$ の場合 $P_j(2^X) = \{j\}$ となり，意味をなさない．

A-シャプレイ値はアンチマトロイド集合系でない集合系上のゲームに適用できない．例 18 で与えた集合系とよく似た構造を持つ例 19 のような集合系 (アンチマトロイド集合系と双対関係にあり，convex geometry 集合系とよばれる) 上のゲームに FK-シャプレイ値を適用することができない．形式的に適用することは可能であるが，この場合，定理 21 は成り立たなくなる．

以上のことから判断して，A-シャプレイ値に比べ，FK-シャプレイ値は妥当な拡張であるように思う．FK-シャプレイ値の公理系は，公理 9 以外は自然な性質であるが，しかしながらシャプレイ値の拡張としては，公理 1,2,3,4 からなる公理系の自然な拡張となるものが望ましいであろう．今後の課題である．

参考文献

[1] E. Algaba, J.M. Bilbao, R. van den Brink and A. Jime' nez-Losada, Axiomatizations of the Shapley value for cooperative games on antimatroids, Math. Meth. Oper. Res. **57**, 49-65, 2003.

[2] III J.F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work, A mathematical analysis. Rutgers Law Review **19**, 313-345,1965.

[3] U. Faigle and W. Kern, The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, Int. J. of Game Theory bf 21, 249-266, 1992.

[4] L.S. Shapley, A value for n-person games, Kuhn HW, Tucker, AW (eds) Contributions to the Theory of Games Vol. II, Princeton, 307-317, 1953.